Μαθημα 7ο 2/11/2017

Διαφ. Εξισωσεις

Διαφορικες Εξισωσεις β' ταξης

$y'' = F(x,y)$

$y' = z$ (μετασχηματισμος), $z' = F(x,z)$ και ετσι εχω

εξισωση α' ταξης

Ασκηση 1, (i), σελ. 52

$xy'' = y' + x^2$ να επιλυθει, $x \neq 0$

Θετω $xz' - z = x^2 \Rightarrow \frac{xz' - z}{x^2} = 1$

Αρα $\left(\frac{z}{x}\right)' = 1 \Rightarrow \frac{z}{x} = x + C_1 \Rightarrow z = x^2 + C_1 x$

$y' = x^2 + C_1 x$ → δυο παραμετροι σε β' ταξης

Αρα γενικη λυση : $y(x) = \frac{x^3}{3} + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2$, $x \neq 0$

Ασκηση 3, (i), (ΠΑΤ)

$xy'' + x(y')^2 - y' = 0$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$

Εχω αρχικα $x > 0$

$y' = z$: $xz' + xz^2 - z = 0$ (Bernoulli)

$z' + z^2 - \frac{1}{x} z = 0$

$\omega = z^{1-2} = \frac{1}{z}$, $\omega' = -\frac{z'}{z^2}$

Διαιρω με z^2

$\frac{z'}{z^2} + 1 - \frac{1}{x} z = 0 \Rightarrow -\omega' + 1 - \frac{1}{x}\omega = 0 \Rightarrow \omega' + \frac{1}{x}\omega = 1$

$\Rightarrow x\omega' + \omega = x \Rightarrow (x\omega)' = x \Rightarrow x\omega = \frac{x^2}{2} + C_1$

$$c = 2c_1$$

$$x\omega = \frac{x^2+2c_1}{2} \Rightarrow \omega = \frac{x^2+C}{2x}, \quad x>0$$

Άρα γενική λύση: $z(x) = \dfrac{2x}{x^2+C}$, $x>0$

$$y'(x) = \frac{2x}{x^2+C}, \quad x>0$$

Άρα $y(x) = \displaystyle\int \frac{2x}{x^2+C} + C_0 \Rightarrow y(x) = \log(|x^2+C|) + C_0$

$$\Rightarrow y(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2$$

$$\left.\begin{aligned} y(2)=2 &: \quad \log(4+C) + C_0 = 2 \\ y'(2)=1 &: \quad \frac{2\cdot 2}{4+C} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{βρίσκω τα } C \text{ και } C_0$$

Αν είχαν $y(x) = \displaystyle\int \frac{2}{x^2+C} + C_0$ θα ήταν χαλύτερο να κάνω

Εξαρχής ορισμένη ολοκλήρωση

Αν $C=0$ θα είχα να ολοκληρώσω $2/x^2$

και $C>0$ τόξο εφαπτομένης

2ⁿ περίπτωση:

$$y'' = F(y, y') \quad \text{θέτω } z = y'$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z\cdot\frac{dz}{dy}$$

Παράδειγμα 1,6ε7 49

$y'' + (y')^2 + y' = 0$ με ΠΑΤ $y(0)=0$, $y'(0)=1$

Θέτω $z = y'$

Επίσης $y'' = z \frac{dz}{dy}$

$z \cdot \frac{dz}{dy} + z^2 + z = 0 \Rightarrow z\left(\frac{dz}{dy} + z + 1\right) = 0$

$z = 0$

$y' = 0 \Rightarrow y(x) = C_1$ η οποία της εξίσωσης όχι του Π.Α.Τ

$\frac{dz}{dy} + z + 1 = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z+1} = -dy \Rightarrow \log(|z+1|) = -y + C_1$

$z + 1 = \pm e^{-y + C_1}$, $z(0) = 1$

$z = e^{0+C_1} \Rightarrow e^{C_1} = 2 \Rightarrow C_1 = \log 2$

$z + 1 = 2e^{-y}$

$y' + 1 = 2e^{-y} \Rightarrow \frac{y'}{2e^{-y} - 1} = 1 \Rightarrow \int \frac{dy}{2e^{-y} - 1} = \int dx + C_0 \Rightarrow$

$-\int -\frac{e^y}{2 - e^y} dy = x + C_1 \Rightarrow -\log|2 - e^{-y}| = x + C_1 \Rightarrow$

$C_1 = 0$

$y(0) = 2$ ΠΑΤ αλλά όχι αν είχα $y(0) = 3$

$y'(0) = 7$ $y(1) = 7$

β' ταξης γραμμικοι υποβιβασμος

(E) : $a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = \rho(x)$, $x \in I$, $a_2(x) \neq 0 \;\; \forall x \in I$

(E') : $a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$ ομογενης

Αν ξεραμε μια λυση της E_0 τοτε ο μετασχηματισμος $y = y_1 \cdot z$ μετασχηματιζει την εξισωση σε α' βαθμου

Πραγματι

$a_2(y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'') + a_1(y_1' z + y_1 z') + a_0 y_1 z = \rho(x)$

$a_2 y_1'' z + a_2 2y_1' z' + a_2 y_1 z'' + a_1 y_1' z + a_1 y_1 z' + a_0 y_1 z = \rho(x)$

$z(a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + 2a_2 y_1' z' + a_2 y_1 z'' + a_1 y_1 z' = \rho(x)$

$z' = u$: $a_2 y_1 u' + (2a_2 y_1' + a_1 y_1) u = \rho$ α' ταξης

Ασκηση

(E) : $(1-x^2) y'' - 2xy' - 2y = 0$, $x \in (-1,1)$, $y_1 = x$

Ευκολα αντικαθιστουμε τη $y_1 = x$ εδοσον ειναι λυση της (E)

Μετασχηματισμος $y = xz$

$(1-x^2)(z''x + 2z') - 2x(xz' + z) + 2xz = 0$

$(1-x^2)xz'' + (1-x^2)2z' - 2x^2 z' - 2xz + 2xz = 0$

$(1-x^2)xz'' + ((1-x^2)^2 - 2x)z' = 0$

$x(1-x^2)u' + (2 - 2x^2 - 2x^2)u = 0$

$x(1-x^2)u' + 2(1-2x^2)u = 0$ $\quad (z' = u)$

Άσκηση 2, (ix), σελ 52

$y'' = 2yy'$

$z = y'$

$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = z \cdot \frac{dz}{dy} = 2yz$

$z = 0$: $y' = 0 \to y = c$

$z \neq 0$: $\frac{dz}{dy} = 2y$

$dz = 2y\,dy$

$z = y^2 + c_1$

$y' = y^2 + c_1$

$\frac{dy}{y^2+c_1} = dx$

$\int \frac{dy}{y^2+c_1} = x + c_2$ δε μπορεί να το υπολογίσω

$c = 0$: $-\frac{1}{y} = x + c_2$

$c > 0$: $\int \frac{dy}{y^2 + (\sqrt{c_1})^2} = x + c_2$

! Έλυνε τις ασκήσεις στο test γρήγορα και μισές, δεν το έγραψα